Séries numériques et intégrales généralisée

M6 – Chapitres 1 et 2

Théorèmes (Pour STP ou $f > 0$ sauf définition et absolue conv.)	**Séries numériques**	**Intégrales généralisés** $\int_a^{+\infty} f(t)dt$	$\int_a^{b} f(t)dt$
Définition	$\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ Une STP conv $\Leftrightarrow$ suite des (S_n) majorée.	$\int_a^b f(t)dt$ conv $\Leftrightarrow \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt \in \mathbb{R}$	
Théorème de comparaison	$\underline{a_n \leq b_n}$: $\sum b_n$ conv $\Rightarrow \sum a_n$ conv $\sum a_n$ div $\Rightarrow \sum b_n$ div $\underline{a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n}$: $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sim. conv ou div	$\underline{f \leq g}$: $\int_a^b g$ conv $\Rightarrow \int_a^b f$ conv $\int_a^b f$ div $\Rightarrow \int_a^b g$ div $\underline{f \underset{b}{\sim} g}$: $\int_a^b g$ et $\int_a^b f$ sim. conv ou div	
Riemann Règle n^α et t^α	$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $\alpha > 1$ $\lim n^\alpha u_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$ conv $\alpha \leq 1$ $\lim n^\alpha u_n > 0 \Rightarrow$ div	$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}$ $\alpha > 1$ $\lim t^\alpha f \in \mathbb{R} \Rightarrow$ conv $\alpha \leq 1$ $\lim t^\alpha f > 0 \Rightarrow$ div	$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}$ $\alpha < 1$ $\lim (t-b)^\alpha f \in \mathbb{R} \Rightarrow$ conv $\alpha \geq 1$ $\lim (t-b)^\alpha f > 0 \Rightarrow$ div
Critère de d'Alembert	$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow$ conv $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow$ div		
Absolue convergence	$\sum \lvert u_n \rvert$ cv $\Rightarrow \sum u_n$ abs cv $\Rightarrow \sum u_n$ cv	$\int_a^b \lvert f \rvert$ conv $\Rightarrow \int_a^b f$ abs conv $\Rightarrow \int_a^b f$ conv	
Leibniz	$\sum (-1)^n a_n$ $(a_n) > 0$ $\searrow$ $\to 0$ $\Rightarrow$ conv | $S_{2n} \searrow$ | $S_{2n+1} \nearrow$		

Séries numériques et intégrales généralisée

M6 – Chapitres 1 et 2

Compléments sur les séries

1. Séries arithmétiques et géométriques

Arithmétique	Géométrique
Une série arithmétique de raison $r \neq 0$ est toujours divergente. $S_n = \frac{(a_{n_0} + a_n) \times nb_{termes}}{2}$	$\sum_{n \geq n_0} u_n$ série géo converge $\Leftrightarrow |q| < 1$ $\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ $S_n = \frac{U_{n_0} - U_{n+1}}{1-q}$ $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \frac{u_{n_0}}{1-q}$

2. Comparaison séries et intégrales

$$\text{Soit } \sum_{n \geq n_0} a_n \text{ STP} \qquad a_n = f(n) \qquad F(x) = \int f(x)$$

- $a_1 + \int_1^n f(x)dx \geq S_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx$
- $\sum_{n \geq n_0} a_n$ conv $\Leftrightarrow F$ majorée

3. Approximation de la somme totale

$$\sum u_n \text{ abs conv} \quad u_n \leq Aq^n \quad q \in]0;1[\;\Rightarrow\; |S - S_n| \leq \frac{Aq^{n+1}}{1-q}$$